www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

Université d'Orléans

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE L'ÉNERGIE ET DES MATÉRIAUX

CONCOURS 1990

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures — COEFFICIENT : 4

Option : Spéciales C

Le soin apporté à la rédaction et aux calculs,
ainsi que la précision des explications seront des éléments importants d'appréciation.

PARTIE I

On désigne par $\mathscr{P}$ l'espace vectoriel réel des polynômes à une indéterminée à coefficients réels (c'est-à-dire $\mathbb{R}[X]$, que l'on identifie aussi à l'ensemble des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

Soit φ : $\mathscr{P} \to \mathscr{P}$

$P \mapsto Q$ où $Q(X) = \frac{1}{2}[P(X+1) + P(X)]$.

1. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{P}$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soit φ_n la restriction de φ à $\mathscr{P}_n$.
   a. Montrer que φ_n est un endomorphisme de $\mathscr{P}_n$, bijectif.
   b. Préciser les valeurs propres de φ_n, et indiquer si φ_n est diagonalisable.
   c. Montrer l'existence d'un unique élément E_n de $\mathscr{P}_n$ tel que : $\frac{1}{2}[E_n(X+1) + E_n(X)] = \frac{X^n}{n!}$

2. On s'intéresse maintenant aux propriétés de la suite de polynômes $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie.
   Montrer que :
   a. $E_0 = 1$.
   b. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $E_n(0) + E_n(1) = 0$.
   c. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $(E'_n) = E_{n-1}$.
   (où E'_n désigne le polynôme dérivé de E_n).
   d. Montrer que les conditions *a*, *b*, *c* caractérisent la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   e. Préciser E_n pour $n \leqslant 4$.

3. *a.* Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$ $E_n(1-X) = (-1)^n \cdot E_n(X)$.
   b. Montrer que pour tout p dans $\mathbb{N}^*$, on a : $E_{2p}(1) = E_{2p}(0) = 0$; $E_{2p-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

4. Étudier les variations de E_n sur $[0, 1]$ selon la parité de n. On montrera notamment que pour tout p dans $\mathbb{N}^*$:
   a. 0 et 1 sont les seules racines de E_{2p} dans $[0, 1]$.
   b. $\frac{1}{2}$ est la seule racine de E_{2p+1} dans $[0, 1]$.
   c. $(-1)^{p+1} E_{2p+1}(0) > 0$.

PARTIE II

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on note $a_n = E_n(0)$ où E_n est défini dans la première partie.

1. *a.* Montrer que : $E_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \frac{X^{n-k}}{(n-k)!}$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.
   b. En déduire que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on a : $a_n = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{(n-k)!}$.
   c. Prouver que pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a : $|a_n| \leqslant 1$.

Tournez la page S.V.P.

2. Soit f une application indéfiniment dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a. Prouver que pour tout x réel et tout k dans $\mathbb{N}$:

$$\int_0^1 E_{2k+2}(t) \cdot f^{(2k+3)}(x+t) \cdot dt = a_{2k+1}\left[f^{(2k+1)}(x+1) + f^{(2k+1)}(x)\right] + \int_0^1 E_{2k}(t) \cdot f^{(2k+1)}(x+t)\, dt.$$

b. En déduire que pour tout x réel et n dans $\mathbb{N}^*$, on peut écrire :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[f(x+1) + f(x)\right] + \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+1}\left[f^{(2k+1)}(x+1) + f^{(2k+1)}(x)\right]\right) + R_{2n+1}(x)$$

où l'on exprimera $R_{2n+1}(x)$ sous la forme d'une intégrale sur $[0, 1]$ d'une fonction faisant intervenir $f^{(2n+1)}$ et E_{2n}.

c. Soit $u \in]-1, 1[$ et $f : t \mapsto e^{ut}$.

Grâce à une majoration de $|R_{2n+1}|$ dans ce cas, prouver que : $\dfrac{2}{1+e^u} = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} \cdot u^{2k+1}$.

d. Conclure que pour $u \in]-1, 1[$, on a l'égalité : $\dfrac{2}{1+e^u} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot u^k$.

3. *a.* On considère la série entière $G(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot z^k$, et soit R son rayon de convergence. Justifier que : $R \geqslant 1$.

(On ne demande pas de déterminer exactement R.)

b. Justifier que pour tout x dans $\mathbb{R}$ et tout $z \in]-R, R[$, on a :

$$\frac{2e^{z \cdot x}}{1+e^z} = \sum_{n=0}^{+\infty} E_n(x) \cdot z^n.$$

c. Conclure que la fonction réelle $t \mapsto \dfrac{2}{e^t + e^{-t}}$ est développable en série entière, et préciser son développement sous la forme : $\sum_{n=0}^{+\infty} e_n t^n$.

4. *a.* Prouver que pour tout x et y dans $\mathbb{R}$, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a :

$$E_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{E_k(x) \cdot y^{n-k}}{(n-k)!}$$

b. Prouver que pour tout x réel, et tout n dans $\mathbb{N}$, on a :

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e_k\left(x - \frac{1}{2}\right)^{n-k}}{2^k (n-k)!}$$

(où e_k est défini en II.3.c).

Tournez la page S.V.P.

PARTIE III

Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé, sur lequel seront définies les variables aléatoires considérées ci-dessous.

1. *a.* Vérifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \cdot dt}{\pi[e^t + e^{-t}]}$ existe et vaut 1.

   b. Nous dirons par la suite qu'une variable aléatoire réelle Y suit la loi $\mathcal{E}$ si elle admet comme densité l'application : $\theta : t \mapsto \frac{2}{\pi[e^t + e^{-t}]}$.

   Si Y suit la loi $\mathcal{E}$, préciser sa fonction de répartition et la représenter graphiquement.

   Montrer que Y admet des moments de tous les ordres. Préciser l'espérance de Y.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $I_n = \int_0^{\infty} \frac{t^{2n}}{e^t + e^{-t}} \cdot dt$.

   a. Vérifier que pour tout N dans $\mathbb{N}$ on peut écrire :

$$I_n = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \cdot \int_0^{\infty} t^{2n} e^{-(2k+1)t} \cdot dt + r_N$$

   avec
$$r_N = (-1)^{N+1} \int_0^{\infty} \frac{t^{2n} \cdot e^{-(2N+3)t}}{1 + e^{-2t}} \cdot dt.$$

   b. Justifier $\lim_{N \to \infty} r_N = 0$ (on pourra utiliser éventuellement un changement de variable, après avoir majoré $|r_N|$).

   c. En déduire la valeur de l'espérance de Y^{2n} en fonction de $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2n+1}}$ où Y suit la loi $\mathcal{E}$ et n est dans $\mathbb{N}$.

   d. Retrouver ainsi la valeur de : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)}$.

   e. En admettant que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = -\frac{\pi^3}{4} E_2\left(\frac{1}{2}\right)$, préciser la variance de Y suivant la loi $\mathcal{E}$.

3. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{E}$.

   Déterminer une densité de la variable $Z = e^Y$.

   La variable Z admet-elle une espérance ?

4. Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi $\mathcal{E}$. Déterminer une densité de la variable $S = U + V$.

5. *a.* Pour tout x dans $\mathbb{R}$, prouver la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\cos(tx)}{e^t + e^{-t}} dt = \mathcal{L}(x)$.

   b. Question subsidiaire, réservée aux candidats ayant traité tout le problème :

   - Avez-vous une idée de ce que pourrait valoir $\mathcal{L}(x)$? Connaissez-vous une méthode pour calculer $\mathcal{L}(x)$?
   - Quel lien voyez-vous entre ce calcul et celui des moments d'une variable Y suivant la loi $\mathcal{E}$?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail